

## قواعد الاشتقاق

$$1) \frac{d}{dx} (A) = 0$$

$A = \text{constant}$

مثال:  $\frac{d}{dx} 5 = 0$

$$2) \frac{d}{dx} (x^n) = n x^{n-1}$$

$$3) \frac{d}{dx} [f(x)]^n = n (f(x))^{n-1} \cdot f'(x)$$

$$4) (f \cdot g)' = f \cdot g' + g \cdot f'$$

$$5) \left( \frac{f}{g} \right)' = \frac{g \cdot f' - f \cdot g'}{g^2}$$

$$6) [\sqrt{f(x)}]' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

$$7) \left( \frac{A}{x} \right)' = \frac{-A}{x^2}$$

$$8) [e^{f(x)}]' = f'(x) \cdot e^{f(x)} \quad e = 2.718281828$$

$$9) [a^{f(x)}]' = f'(x) \cdot a^{f(x)} \cdot \ln a$$

$$10) x \cdot y \rightarrow y' = ?? \quad \text{Implicit derivatives.}$$

الاشتقاق الضمني

Ex:  $y = (2x+3)^4 \cdot (3x-4x)^2$  Find  $y'$  ?

$$y' = (2x+3)^4 \cdot 2(3x^2-4x) \cdot (6x-4) + (3x^2-4x)^2$$

$$\cdot 4(2x+3)^3 \cdot (2)$$

التمثال تطبق على القاعدة رقم 4

Ex:  $y = \frac{x^2+3}{x-1}$  Find  $y'$  ?

$$y' = \frac{(x-1)(2x) - (x+3)(1)}{(x-1)^2}$$

التمثال تطبق على القاعدة رقم 5

Ex:  $y = \frac{3}{(x^2+4)}$  Find  $y'$  ?

$$y' = \frac{-3(2x)}{(x^2+4)^2} = \frac{-6x}{(x^2+4)^2}$$

التمثال تطبق على القاعدة رقم 7

• another solution

$$y' = 3 \cdot (x^2+4)^{-1} \rightarrow 3 \cdot (-1)(2x)(x^2+4)^{-2}$$

$$y' = \frac{-3(2x)}{(x^2+4)^2} = \frac{-6x}{(x^2+4)^2}$$

حول الكسور إلى أس سالب  
والتطبيق ونضع الأس السالب  
في المقام

Ex:  $y = \sqrt{2x^2 - 3x}$  Find  $y'$ ?

$$y' = \frac{4x - 3}{2\sqrt{2x^2 - 3x}}$$

المثال تطبق على القاعدة رقم 6

Ex: Find  $[e^{f(x)}]'$ ?

$$1 - e^{x^2} = 2x \cdot e^{x^2}$$

المثال تطبق على القاعدة رقم 8

$$2 - e^{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{\sqrt{x}}$$

Ex: Find  $[a^{f(x)}]'$ ?

$$1 - 3^{2x} = 2 \cdot 3^{2x} \cdot \ln 3$$

المثال تطبق على القاعدة رقم 9

$$2 - 5^{4x} = 4 \cdot 5^{4x} \cdot \ln 5$$

Ex:  $y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^{-x} + 1}$  Find  $y'$ ?

$$y' = \frac{(e^{-x} + 1)(e^x - e^{-x}) - (e^x + e^{-x}) \cdot -e^{-x}}{(e^{-x} + 1)^2}$$

المثال تطبق على القاعدة رقم 8 و 5

« 22 »

Ex: Find:

$$1 - e^{-x} \cdot e^x = e^{-x+x} = e^0 = 1$$

$$2 - (e^{2x})^x = e^{2x^2}$$

$$3 - e^{2x} \div e^{3x} = e^{2x-3x} = e^{-x}$$

• Implicit:

$$\text{Ex: } x^3 + 3xy^2 = 5x \text{ Find } y'?$$

$$y' = 3x^2 + 3(x \cdot 2yy' + y^2 \cdot 1) = 5$$

$$y' = 3x^2 + 6xyy' + 3y^2 = 5$$

$$y' = \frac{5 - 3x^2 - 3y^2}{6xy}$$

• كل نرم لا يوجد به  $y$  ينقل للبمين بإشارة مخالفة وكل نرم يوجد به  $y$  يوضع في المقام.

$$Ex: 5x^2 + x^2y^2 - 5y^3 = 3 \text{ Find } y'?$$

$$y' = 10x + (x^2 \cdot 2yy' + y^2 \cdot 2x) - 15y^2y' = 0$$

$$y' = 10x + 2x^2yy' + 2xy^2 - 15y^2y' = 0$$

$$y' = \frac{-10x - 2xy^2}{2x^2y - 15y^2}$$

$$\text{Find } \frac{dy}{dx} \text{ where } y = u^2 + 1, u = 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2u \cdot 6x$$

$$\frac{dy}{dx} = 2(3x^2) \cdot 6x$$

$$\frac{dy}{dx} = 6x^2 \cdot 6x = 36x^3$$

• another solution:

$$y = (3x^2)^2 + 1 = 9x^4 + 1$$

$$y' = 36x^3$$



"24"

Find  $\frac{dy}{dx}$  where  $y = u^2 + 5u$ ,  $u = \sqrt{x}$ ?

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = (2u + 5) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = (2\sqrt{x} + 5) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

• Properties:

$$1) \ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$$

$$2) \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$$

$$3) \ln x^n = n \ln x$$

$$4) \ln 1 = 0, \ln e = e^{\ln} = 1$$

$$\bullet \ln e^x = x, e^{\ln x} = x$$

« 25 »

$$\text{Ex: } 5 \ln x - \frac{1}{2} \ln y + 3 \ln z$$

$$= \ln x^5 - \ln y^{\frac{1}{2}} + \ln z^3$$

$$= \ln \frac{x^5 \cdot z^3}{y^{\frac{1}{2}}}$$

• formula:

$$1) \ln y = \frac{y'}{y}$$

$$2) \ln x = \frac{1}{x}$$

$$3) \ln x^2 = \frac{2x}{x^2}$$

$$\text{Ex: } [\ln(x^2 - 5x + 3)]'$$

$$= \frac{2x - 5}{x^2 - 5x + 3}$$

$$\text{Ex: } y = \left[ \frac{(x^2 + 5)^4 \cdot (x^3 - 5x)^3}{(2x + 1)^6} \right]^{\frac{1}{3}}$$

$$\ln y = \frac{1}{3} [4 \ln(x^2 + 5) + 3 \ln(x^3 - 5x) - 6 \ln(2x + 1)]$$

Find The derivative of two sides :

رابع الحل في المثال السابق

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{3} \left[ 4 \frac{2x}{x^2+5} + 3 \frac{3x^2-5}{x^3-5x} - 6 \frac{2}{2x+1} \right]$$

$$y' = \left( \frac{(x^2+5)^4 \cdot (x^3-5x)^3}{(2x+1)^6} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{3} \left[ 4 \frac{2x}{x^2+5} + 3 \frac{3x^2-5}{x^3-5} - 6 \frac{2}{2x+1} \right]$$

• Application:

1) growth  $\rightarrow P'(x) = 0.01 P(x) \Rightarrow P(x) = P(0) \cdot e^{0.01t}$

2) decay  $\rightarrow P'(x) = -0.03 P(x) \Rightarrow P(x) = P(0) \cdot e^{-0.03t}$

- $P(0)$  - Initial (بدء العد) الشرط الابتدائي
- Any number = constant (العدد الثابت)
- $t$  = time (الوقت)

• لمعرفة السؤال توجد صورتين للدالة عليه إما differential equation أو  $P'(x)$

• لو سؤال على Fast هي نفسها  $P'(x)$

• أول ما يعطينا  $P'(x)$  نحول إلى  $P(x)$

• لايجاد المطلوب من السؤال نستخدم  $\ln$  أو الحاسبة



« 27 »

Ex: Slide 48 in tutorial 5

$$= P(x) = P(0) \cdot e^{kt}$$

$$= 5.88 = 5.51 \cdot e^{k(5)} \Rightarrow \frac{5.88}{5.51} = e^{5k}$$

$$= \ln \frac{5.88}{5.51} = \ln e^{5k} \Rightarrow 5k \ln e$$

$$= 0.065 = 5k \Rightarrow \frac{0.065}{5} = k$$

$$= k = 0.013 \Rightarrow P(t) = 5.51 e^{0.013t}$$

$$7 = 5.51 e^{0.013t} \Rightarrow \frac{7}{5.51} = \frac{5.51}{5.51} e^{0.013t}$$

$$= \ln \frac{7}{5.51} = \ln e^{0.013t} \Rightarrow 0.239 = 0.013t$$

$$= \frac{0.239}{0.013} = \frac{0.013}{0.013} t \Rightarrow 18.41 = t$$

$$t = 1993 + 18.41 \Rightarrow t = 2011.41 \approx 2011$$

Ex: Slide 50 in tutorial 5

$$P'(t) = -0.00043 P(t) \Rightarrow P(t) = 12 e^{-0.00043 t}$$

a)  $P(t) = 12 e^{-0.00043 t}$

b)  $P(0) = 12$

c)  $-0.00043 = K$

d)  $P(943) = 12 \cdot e^{-0.00043(943)} \Rightarrow P(943) = 8$

e)  $P'(t) = -0.00043 P(t) \Rightarrow P'(t) = -0.00043 \cdot 1$   
 $P'(x) = -0.00043$

• Integration = Antiderivatives النَّال على الإستقامة

$$1) \int A dx = Ax + C$$

$$2) \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$3) \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$$

$$4) \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$$

$$5) \int f'(x) \cdot [f(x)]^n dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C$$

Ex:

$$1) \int 3 dx = 3x + C$$

$$2) \int \sqrt{5} dx = \sqrt{5} x + C$$

$$3) \int 5 dy = 5y + C$$

$$4) \int \sqrt{7} dt = \sqrt{7} t + C$$

• هذا النَّال على القاعدة رقم ١